26/05/2017

Μάθημα 23ο

Απει 4

Είχαμε πει ότι την $\bar{\Phi}: K \to \mathbb{R}^3$ ($K \subset \mathbb{R}^2$) μια επιφάνεια, τότε το

$$A(\bar{\Phi}) = \int_K \| \underbrace{N(u,v)}_{= \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}\right)(u,v)} \| \, d(u,v)$$

δίνει το <u>εμβαδό</u> της $\bar{\Phi}$.

<u>Ερώτημα</u>: Έστω $\bar{\psi} = \bar{\Phi} \circ \bar{g} : T \to \mathbb{R}^3$ ($T \subset \mathbb{R}^2$), η <u>αναπαραμετρικοποίηση της επιφάνειας</u> (ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$)
$S = \bar{\Phi}(K) = \bar{\Phi}(T) \subset \mathbb{R}^3$ όπου $\bar{g}: T \to K$ ένας παραμετρικός μετασχηματισμός (που διατηρεί τον προσανατολισμό, αν $\det D\bar{g}(s,t) > 0$, ενώ τον αντιστρέφει αν $\det D\bar{g}(s,t) < 0$)
Ισχύει $A(\bar{\psi}) = A(\bar{\Phi})$;

<u>Απάντηση</u>: Ναι, γιατί $\to$

$$A(\bar{\psi}) = \int_T \| \underbrace{\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}(s,t)}_{\overset{\circledast}{=} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u}(\bar{g}(s,t)) \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}(\bar{g}(s,t))\right) \det D\bar{g}(s,t)} \| \, d(s,t)$$

$\circledast$ $\bar{\psi} = \bar{\Phi} \circ \bar{g} \Rightarrow D\bar{\psi}(s,t) = D\bar{\Phi}(\bar{g}(s,t)) \, D\bar{g}(s,t) \to \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \underset{=\bar{a}}{\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial s}} & \underset{=\bar{b}}{\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}} \end{pmatrix}(s,t) = \begin{pmatrix} \underset{=\bar{c}}{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u}} & \underset{=\bar{d}}{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}} \end{pmatrix}(\bar{g}(s,t))$$

$$\left\{ \int_{g(T)} f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_T f(g(y)) \cdot |\det D\bar{g}(y)|\, d\bar{y} \right\}$$

και έχουμε $(\bar{a}\ \bar{b}) = (\bar{c}\ \bar{d}) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \bar{c} \times \bar{d}$$

<u>Παρατηρούμε</u>, από την προηγούμενη απόδειξη (βλ $*$), ότι αν $\det D\bar{g}(s,t) > 0$ (<0), τότε το κάθετο διάνυσμα της $\bar{\psi}$ έχει τον ίδιο προσανατολισμό (αντίστοιχα τον αντίθετο αν (<0)) με το κάθετο διάνυσμα της $\bar{\varphi}$.

$\Rightarrow$ Ο προσανατολισμός μιας επιφάνειας δίνεται από την κατεύθυνση του κάθετου διανύσματος (ειδικότερα του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος).

<u>Συνέχεια της παρατήρησης</u>: Ο πιο απλός μετασχηματισμός που αλλάζει τον προσανατολισμό είναι να αλλάξω τη σειρά των δύο παραμέτρων $(u,v) \xrightarrow[g]{} (v,u)$

$$\bar{g}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow D\bar{g}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det D\bar{g} = -1.$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\bar{\varphi} : K \to \mathbb{R}^3$ μια επιφάνεια ($K \subset \mathbb{R}^2$ κλπ) και $f : \bar{\varphi}(K) \to \mathbb{R}$ μια <u>πραγματική</u> συνεχής συνάρτηση. Τότε: ορίζουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της f πάνω στην $\bar{\varphi}$:

$$\int_{\bar{\varphi}} f\, d\sigma := \int_K f(\bar{\varphi}(u,v))\, \|N(u,v)\|\, d(u,v)$$

Ορισμός: Έστω $\bar{\Phi}: K \to \mathbb{R}^3$, $K \subset \mathbb{R}^2$ και $\bar{f}: \bar{\Phi}(K) \to \mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικό πεδίο συνεχές. Τότε ορίζουμε:

$$\int_{\bar{\Phi}} \bar{f} \cdot \bar{n} \, d\sigma := \int_K \bar{f}(\bar{\Phi}(u,v)) \cdot \bar{N}(u,v) \, d(u,v)$$

επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\bar{f}$ πάνω στην $\bar{\Phi}$.

Ειδική περίπτωση: $f = 1$, $\int_{\bar{\Phi}} 1 \, d\sigma = A(\bar{\Phi})$

Ως προς τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων αυτών είναι αυτές που προκύπτουν από τα διπλά ολοκληρώματα

π.χ. γραμμικότητα: $\int_{\bar{\Phi}} (af_1 + bf_2) \, d\sigma = a \int_{\bar{\Phi}} f_1 \, d\sigma + b \int_{\bar{\Phi}} f_2 \, d\sigma$

και αντίστοιχα $\int_{\bar{\Phi}} (a\bar{f}_1 + b\bar{f}_2) \cdot \bar{n} \, d\sigma =$

$$= a \int_{\bar{\Phi}} \bar{f}_1 \cdot \bar{n} \, d\sigma + b \int_{\bar{\Phi}} \bar{f}_2 \cdot \bar{n} \, d\sigma$$

Παρατήρηση: Αν η $\bar{\Phi}$ είναι κανονική

$$\left(\text{δηλ. } \bar{N}(u,v) = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v}(u,v) \neq \bar{0} \right)$$

έχουμε μοναδιαίο κάθετο $\bar{n}(u,v) = \dfrac{\bar{N}(u,v)}{\|\bar{N}(u,v)\|} \iff$

$$\iff \bar{N}(u,v) = \bar{n}(u,v) \|\bar{N}(u,v)\|$$

$$\Longrightarrow \int_K f(\bar{\Phi}(u,v)) \cdot \bar{N}(u,v) \, d(u,v) = \int_K \bar{f}(\bar{\Phi}(u,v)) \cdot \bar{n}(u,v) \|\bar{N}(u,v)\| \, d(u,v)$$

το οποίο δικαιολογεί τον συμβολισμό.

SOS-ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Όπως είδαμε (βλ. (*)), το εμβαδό επιφάνειας, αντίστοιχα και για επιφ. ολοκλ. πραγμ. συνάρτησης, αυτά είναι ανεξάρτητα από την παραμετρικοποίηση και άρα πολλές φορές γράφουμε

$$\int_S f\,d\sigma := \int_{\bar{\varphi}} f\,d\sigma, \quad \text{με } S := \bar{\varphi}(K) \subset \mathbb{R}^3$$

(Αυτό ισχύει και για το εμβαδό $A(S) = \int_S 1\,d\sigma = \int_{\bar{\varphi}} 1\,d\sigma = A(\bar{\varphi})$)

Για διανυσματικά πεδία το επιφαν. ολοκλήρωμα εξαρτάται από τον προσανατολισμό (και μόνο). Πιο συγκεκριμένα:

Πρόταση: $\bar{\varphi}: K \to \mathbb{R}^3$, $K \subset \mathbb{R}^2$, $\bar{\psi} = \bar{\varphi} \circ \bar{g}: T \to \mathbb{R}^3$, $T \subset \mathbb{R}^2$,

$$\Rightarrow \int_{\bar{\psi}} \bar{f} \cdot \bar{n}\,d\sigma = \begin{cases} \int_{\bar{\varphi}} \bar{f} \cdot \bar{n}\,d\sigma, & \text{αν } \bar{g} \text{ διατ. προσανατολισμό} \\ -\int_{\bar{\varphi}} \bar{f} \cdot \bar{n}\,d\sigma, & \text{αν } \bar{g} \text{ αντιστρέφει προσανατ.} \end{cases}$$

$$= \int_T \underbrace{\bar{f}(\bar{\psi}(s,t))}_{\bar{\varphi}(\bar{g}(s,t))} \cdot \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}(s,t) \right) d(s,t)$$

<u>Παράδειγμα / Άσκηση:</u> Υπολογίστε το $\int_S f\,d\sigma$, όπου

$f(x,y,z) = (x^2+y^2)z$, S το άνω ημισφαίριο κέντρου $(0,0,0)$ ακτίνας $r>0$.

<u>Λύση</u>

$$\int_{S=\bar{\varphi}(K)} f\,d\sigma = \int_K f(\bar{\varphi}(u,v))\,\|\bar{N}(u,v)\|\,d(u,v)$$

→ <u>Πρόταση 1:</u> $S = \bar{\varphi}_1(K_1)$, $\underbrace{K}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\leq r^2\}} \ni (x,y) \overset{\bar{\varphi}_1}{\mapsto} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{r^2-x^2-y^2} \end{pmatrix}$

→ <u>Πρόταση 2:</u> $S = \bar{\varphi}_2(K_2)$, $\underbrace{K_2}_{[0,\pi/2]\times[0,2\pi]} \ni (\theta,\varphi) \overset{\bar{\varphi}_2}{\mapsto} r\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$$f : \overbrace{\underbrace{\bar{\Phi}(K)}_{\subset\mathbb{R}^3}}^{S} \to \mathbb{R}$$

$f(x,y,z) = (x^2+y^2)z$

$$\int_S f\,d\sigma = \int_D f(\bar{\varphi}(x,y)) \cdot \left\| \left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x} \times \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial y} \right)(x,y) \right\| d(x,y) =$$

$$S = \{ (\underbrace{x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}_{= \bar{\Phi}(x,y)}) : (x,y) \in D \}$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r \}$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & -x/\sqrt{\ldots} \\ 0 & 1 & -y/\sqrt{\ldots} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{\ldots}} \\ \frac{y}{\sqrt{\ldots}} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| \bar{v}(x,y) \| = \sqrt{\frac{x^2}{(\sqrt{})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{})^2} + 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + (\sqrt{})^2}{(\sqrt{})^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\Rightarrow \int_S f \, d\sigma = \int_D (x^2 + y^2) \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \, \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \, d(x,y) =$$

$$= r \int_D (x^2 + y^2) \, d(x,y) = r \cdot \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho \, d\phi \, d\rho =$$

$$= r \cdot 2\pi \underbrace{\int_0^r \rho^3 \, d\rho}_{= \rho^4/4} = \frac{r^5 \pi}{2}$$

Παράδειγμα / Άσκηση: Έστω η επιφάνεια $\bar{\varphi}(u,v) = (u,v,uv)$ με παραμετρικό πεδίο τον μοναδιαίο κλειστό δίσκο κέντρου $(0,0)$.
και f η ταυτοτική απεικόνιση στον $\mathbb{R}^3$.
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της f πάνω από την $\bar{\varphi}$

Λύση

$$\int_{\bar{\varphi}} \bar{f}\cdot\bar{n}\, d\sigma = \int_K \underbrace{\bar{f}(\bar{\varphi}(u,v))}_{\bar{\varphi}(u,v)} \cdot \left(\frac{\partial \bar{\varphi}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{\varphi}(u,v)}{\partial v} \right) d(u,v)$$

$$= \int_K (u,v,uv)\cdot(-v,-u,1)\, d(u,v)$$

$$= -\int_K uv\, d(u,v)$$

$$= -\int_K \; d(u,v) = 0$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$$

$K = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \le 1\}$